

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-009

Betreft: Een door Prof. van Dantzig ontvangen manuscript van

Dr. J.J. Dronkers: Hoofdstuk II.

Inhoud: De door de auteur behandelde problemen.

Bezwaren en opmerkingen, gerangschikt naar de punten
A,B,C,D,E,F,G, (zie 1).



1948

Betreft: Een door Prof. van Dantzig ontvangen manuscript van

Dr. J. Dronkers: Hoofdstuk II.

Inhoud van dit rapport: 1 De door de auteur behandelde problemen.
2 Bezwaren en opmerkingen, gerangschikt naar de punten A, B, C, D, E, F, G (zie 1).

1. De door de auteur behandelde problemen. In § 1 beschouwt D. een frequentie-functie $\omega(x)$ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

$$\omega(x) = 0 \quad \text{voor } x \geq b;$$

$$\omega(x) > 0 \quad \text{op } a < x < b;$$

$$\omega(x) \text{ heeft afgeleiden van elke orde op } a \leq x \leq b;$$

$$\omega'(x) < 0 \quad \text{op } a < x < b.$$

In het vervolg wordt soms $-\log \omega(x) = \gamma(x)$ gesteld en γ als onafhankelijk veranderlijke genomen.

Normaal geldt voor x_0 op (a, b) , $\gamma(x_0) = \gamma_0$,

$$\int_{x_0}^b \omega(x) dx = \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma =$$

$$= \left[-e^{-\gamma} \left\{ \frac{dx}{d\gamma} + \frac{d^2x}{d\gamma^2} + \dots + \frac{d^nx}{d\gamma^n} \right\} \right]_{\gamma_0}^{\infty} + \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^{n+1}x}{d\gamma^{n+1}} d\gamma.$$

Gevraagd wordt:

A). Wanneer is deze formule zinvol? $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^k x}{d\gamma^k}$?

B). Wanneer convergeert de reeks

C). Wanneer nadert

$$R_n = \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^{n+1}x}{d\gamma^{n+1}} d\gamma$$

tot nul, als $n \rightarrow \infty$?

In §1 wordt verder de volgende stelling geponeerd. Beschouw het quotiënt

$$f_n(x) = \frac{d^2x}{d\gamma^2} / \frac{dx}{d\gamma}.$$

(Het is niet geheel duidelijk welke voorwaarden de auteur aan $\frac{dx}{d\gamma}$ resp. $\frac{d^2x}{d\gamma^2}$ oplegt).

Gevraagd te bewijzen:

D) Als $f_n(\gamma) > 0$ voor alle $\gamma > K$ dan is $f_n(\gamma) < 1$ voor $\gamma > L$.
E) Als $f_n(\gamma) < 0$ voor alle $\gamma > K$ dan is $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} f_n(\gamma) = 0$.

In §2 worden twee stellingen genoemd. Stelling 1 luidt als volgt:

F) Indien $x^1 \omega(x)$ voor $x > a$ monotoon niet toeneemt, en voor $x \rightarrow b = \infty$ tot nul nadert; indien verder $\omega(x)$ monotoon toeneemt; indien tenslotte $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x)$ bestaat als $x \rightarrow \infty$, dan geldt voor $\gamma_0 = -\log \omega(x_0) > K$:

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} d\gamma \leq \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} e^{-\gamma_0}.$$

Stelling 2 luidt:

G). Indien voor alle $x_0 > a$

$$\int_{x_0}^{b-\infty} \omega(x) dx < \omega(x_0) \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0},$$

dan is er een getal K zó, dat voor $x_0 > K$ "bij benadering":

$$\int_{x_0}^{\infty} \omega(x) dx \approx \omega(x_0) \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0}.$$

2. Bezwaren en opmerkingen.

A). Men bewijst met volledige inductie gemakkelijk, dat

$$\frac{d^k x}{d\gamma^k} = \frac{\text{veelterm in } (\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(k)})}{(\omega')^{2k-1}}.$$

A₁). Indien nu wordt ondersteld, dat $\omega'(b) \neq 0$, dan bestaat

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow \infty \\ (x \uparrow b)}} \frac{d^k x}{d\gamma^k} \quad (\text{voor elke } k)$$

en deze limiet is eindig. In dit geval geldt dus, dat

$$e^{-\gamma} \frac{d^k x}{d\gamma^k} \rightarrow 0 \quad \text{als } (\gamma \rightarrow \infty) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Hieruit volgt, dat voor elke n ,

$$(2_1) \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma = e^{-\gamma_0} \left\{ \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} + \dots + \left(\frac{d^n x}{d\gamma^n} \right)_{\gamma_0} \right\} + \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^{n+1} x}{d\gamma^{n+1}} d\gamma.$$

A₂). Aangezien in het vervolg deze formule vaak alleen voor $n = 1$ wordt gebruikt, merken we even op, dat de formule voor $n = 1$ reeds geldt, als tenminste één der afgeleiden van $\omega(x)$ in $x = b$ van nul verschilt. We hebben nl.:

$$-\frac{dx}{d\gamma} = \frac{\omega(x)}{\omega'(x)}.$$

Is nu $\omega(x)$ de eerste afgeleide, die in $b \neq 0$ is, dan zal

$$\frac{\omega(x)}{\omega'(x)} = \frac{\omega(b) + \dots + \frac{(x-b)^{k-1}}{(k-1)!} \omega^{(k-1)} \{b + \vartheta_1(x-b)\}}{\omega(b) + \dots + \frac{(x-b)^{k-1}}{(k-1)!} \omega^{(k-1)} \{b + \vartheta_2(x-b)\}} = \frac{\omega^{(k-1)} \{b + \vartheta_1(x-b)\}}{\omega^{(k-1)} \{b + \vartheta_2(x-b)\}} \rightarrow 0$$

$$\text{als } x \uparrow b. \text{ A fortiori zal dus } e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} \rightarrow 0,$$

als $\gamma \rightarrow \infty$ ($x \uparrow b$). Hiernit volgt

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma = e^{-\gamma_0} \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} + \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} d\gamma.$$

A₃). Als alle afgeleiden van $w(x)$ in $x = b$ nul zijn, behoeft

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma}, \text{ d.i. } \lim_{x \uparrow b} \frac{\{w(x)\}^2}{-w'(x)},$$

niet te bestaan. In dat geval heeft de formule dus geen zin.

We geven nu een voorbeeld om onze bewering te staven. Neem

$$w'(x) = -e^{-\frac{1}{b-x}} \left(1 + e^{-\frac{1}{b-x}} - \sin \frac{1}{b-x} \right),$$

$$w(x) = - \int_x^b w'(t) dt.$$

Men verifieert gemakkelijk, dat $w(x)$ afgeleiden heeft van elke orde voor $x < b$, die alle nul zijn in $x = b$. $w(x)$ is voor $x < b$ positief; $w'(x)$ is voor $x < b$ negatief.

Definieer x_n door $\frac{1}{b-x_n} = (2n + \frac{1}{2})\pi$.

Dan is $\sin \frac{1}{b-x_n} = 1$; dus

$$-w'(x_n) = e^{-\frac{1}{b-x_n}} = e^{-(2n + \frac{1}{2})\pi}.$$

Weschaten nu $w(x_n)$. Stel $\frac{1}{b-x} = u$:

$$w(x_n) = - \int_{x_n}^b w'(x) dx = \int_{(2n + \frac{1}{2})\pi}^{\infty} e^{-u} (1 + e^{-2u} - \sin u) \frac{du}{u^2}$$

$$> \int_{(2n + \frac{1}{2})\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-u} (1 + e^{-2u} - \sin u) \frac{du}{u^2}$$

$$> \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-u} \frac{du}{u^2} > \frac{1 - e^{-\pi}}{(2n+2)^2 \pi^2} e^{-(2n+1)\pi}.$$

Bijgevolg is $\frac{\{w(x_n)\}^2}{-w'(x_n)} > \text{const.} \cdot \frac{e^{-2\pi n}}{n^4} \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$ ($x_n \rightarrow b$).

In dit voorbeeld bestaat dus

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{\{w(x)\}^2}{-w'(x)}$$

zeker niet.

A₄). Men kan de moeilijkheden in één slag oplossen door het bestaan en nul zijn van de limieten

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \frac{d^k x}{d\gamma^k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

van tevoren te onderstellen. Hieruit volgt dan (α_1).

B) D. beschouwt het geval, dat

$$\frac{d^k x}{d\gamma^k} \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

Wanneer er bovendien voor gezorgd is, dat de formule (α_1) geldt, dan is de reeks

$$(\beta_1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma_0} \left(\frac{d^k x}{d\gamma^k} \right)_{\gamma_0} \quad (\gamma_0 \text{ willekeurig})$$

convergent, daar zijn partiële sommen begrensd zijn:

$$(\beta_2) \quad e^{-\gamma_0} \left\{ \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} + \dots + \left(\frac{d^n x}{d\gamma^n} \right)_{\gamma_0} \right\} \leq \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma.$$

C). We nemen natuurlijk weer aan, dat

$$\frac{d^k x}{d\gamma^k} \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

We zullen bewijzen, dat in dit geval

$$R_n(\gamma_0) = \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^{n+1} x}{d\gamma^{n+1}} d\gamma \quad (\gamma_0 \text{ willekeurig})$$

tot nul nadert.

We merken allereerst op, dat uit de convergentie van de reeks (β_1) volgt, dat

$$e^{-\gamma} \frac{d^{n+1} x}{d\gamma^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

voor elke γ .

Gelukt het nu, te bewijzen dat de functies

$$e^{-\gamma} \frac{d^{n+1} x}{d\gamma^{n+1}}$$

beneden een integreerbare functie $F(\psi)$ blijven, als $n \rightarrow \infty$, dan volgt uit een bekende stelling van Lebesgue, dat

$$R_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\infty} e^{-\psi} \frac{d^{n+1}x}{d\psi^{n+1}} d\psi \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty).$$

We hebben (zie β_2) voor $n+1$ i.p.v. n) voor elke ψ_1 :

$$e^{-\psi_1} \left(\frac{d^{n+1}x}{d\psi^{n+1}} \right)_{\psi_1} \leq \int_{\psi_1}^{\infty} e^{-\psi} \frac{dx}{d\psi} d\psi \equiv F(\psi_1),$$

$$F(\psi_1) = \int_{x_1}^b w(x) dx \leq (b-x_1)w(x_1) \leq (b-a)w(x_1) = (b-a)e^{-\psi_1}.$$

De functie $F(\psi)$ is dus over (ψ_0, ∞) integreerbaar.

Opmerking bij B) en C). Is de onderstelling $\frac{d^k x}{d\psi^k} \geq 0$

voor alle k in de praktijk wel bruikbaar? Is bv. $\theta'(b) \neq 0$ (zie λ_1), dan kunnen nooit $\frac{dx}{d\psi}$ en $\frac{d^2x}{d\psi^2}$ beide positief zijn op (ψ_0, ∞) . Immers, men vindt na korte berekening, dat

$$f_2(\psi) = \frac{\omega \omega''}{\omega'^2} - 1.$$

Als nu $\omega(b) \neq 0$, dan zal $f_2(\psi) \rightarrow -1$ als $\psi \rightarrow \infty$ ($x \uparrow b$).

D). Blijkens de voorgaande opmerking is, als $f_2(\psi) > 0$ voor $\psi > K$, noodzakelijk $\theta'(b) = 0$.

Mer $\frac{dx}{d\psi} = \frac{\omega(x)}{-\omega'(x)} > 0$ is (zie begin §1) volgt uit $f_2(\psi) > 0$ voor $\psi > K$, dat ook $\frac{d^2x}{d\psi^2} > 0$ is ($\psi > K$). Hieruit volgt nog, dat $\frac{dx}{d\psi}$ monotoon toenemend is ($\psi > K$).

D₁). Onderstel, dat de volgende limieten bestaan (en eindig zijn):

$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} \frac{dx}{d\psi} = p, \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \frac{d^2x}{d\psi^2} = q$$

Daar $\frac{dx}{d\psi} > 0$ is en monotoon toenemend, moet dan $p > 0$ zijn. Uit de onderstelling volgt verder, dat $q = 0$. Immers,

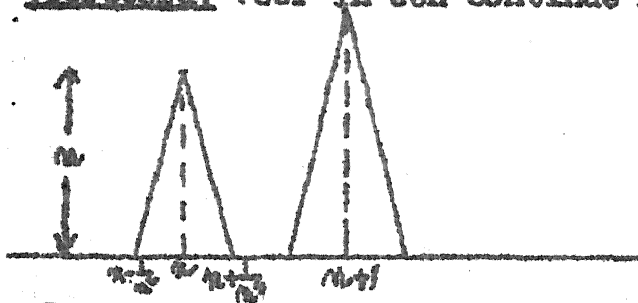
$$\left(\frac{dx}{d\psi} \right)_{\psi_1+1} - \left(\frac{dx}{d\psi} \right)_{\psi_1} = \left(\frac{d^2x}{d\psi^2} \right)_{\psi_1+\vartheta} (0 < \vartheta < 1).$$

Als $\psi_1 \rightarrow \infty$ nadert het linkerlid tot $p - p = 0$, het rechterlid tot q . Conclusie: in dit geval zal $f_2(\psi) \rightarrow 0$ ($\psi \rightarrow \infty$).

Voor ψ voldoende grote L zal dus zeker $f_2(\psi) < 1$.

D₂). Onderstel alleen, dat $\lim_{\psi \rightarrow \infty} \frac{dx}{d\psi}$ bestaat en $= p$.

Dan behoeft er geen L te zijn, zó, dat voor $\gamma > L$ $f_2(\gamma) < 1$ is.
Voorbeeld. Voer in een continue hulpfunctie $\delta(\gamma)$: voor $\gamma \geq 2$ zij



$$\begin{cases} \delta(\gamma) = n & \text{voor } \gamma = n \\ \delta(\gamma) = 0 & \text{voor } \gamma = n \pm \frac{1}{n} \\ \delta(\gamma) \text{ is lineair op } (n - \frac{1}{n}, n) \text{ en } (n, n + \frac{1}{n}), \\ & (n + \frac{1}{n}, n+1) \text{ en } (n+1, n+1 + \frac{1}{n+1}). \end{cases}$$

Neem nu
$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} = \delta(\gamma) + \frac{1}{\gamma^3} & (\gamma \geq 2), \\ \frac{dx}{d\gamma} = 1 + \int_2^\gamma \left\{ \delta(\gamma) + \frac{1}{\gamma^3} \right\} d\gamma & (\gamma \geq 2). \end{cases}$$

Dan is
$$\frac{d^2 x}{d\gamma^2} > 0, \quad \frac{dx}{d\gamma} \geq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \sum_{n=\gamma-1}^{\gamma} \frac{1}{n^3} \geq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} > 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} > 0.$$

Verder is
$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{dx}{d\gamma} = 1.$$

Ook geldt
$$\left(\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} = 0 \right)$$

Beschouw nu $f_2(\gamma)$. Voor $\gamma = n$ geldt:

$$f_2(n) = \frac{n + \frac{1}{n^3}}{1 - \int_n^\infty \left\{ \delta(\gamma) + \frac{1}{\gamma^3} \right\} d\gamma} > n \quad ; \rightarrow \infty \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Opmerking. Onze f_2 is niet oneindig vaak differentieerbaar. Maar men kan in plaats van spitse piekjes in $\delta(\gamma)$ ook wel ∞ -vaak differentieerbare piskjes nemen, zodat dit geen bezwaar kan zijn tegen onze redenering.

D₃). Onderstel, dat

$$\frac{dx}{d\gamma} \rightarrow \infty \quad (\gamma \rightarrow \infty).$$

Ook nu behoeft er geen L te zijn zó, dat voor $\gamma > L$ $f_2(\gamma) < 1$ is.

Neem maar (vgl D₂):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} = \delta(\gamma) + \frac{1}{\gamma} & (\gamma \geq 4) \\ \frac{dx}{d\gamma} = \log \gamma + \int_{\infty}^{\gamma} \delta(\gamma) d\gamma & (\gamma \geq 4). \end{cases}$$

Nu is $f_2(n) = \frac{n + \frac{1}{n}}{\log n - \int_n^{\infty} \delta(\gamma) d\gamma} > \frac{n}{\log n} \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$.

γ). Niet juist. Tegenvoorbeeld:

$$\frac{dx}{d\gamma} = e^{-\gamma}, \quad \frac{d^2 x}{d\gamma^2} = -e^{-\gamma}.$$

Hier is $f_2(\gamma) = -1 < 0$. Het is niet juist, dat $f_2(\gamma) \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow \infty$).

F). Uit het onderstelde volgt, dat $\omega(x)$ afnemend is en tot nul nadert, dus

$\omega'(x) \leq 0$. Daar $\omega'(x)$ monotoon toeneemt, bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega'(x)$. Deze limiet moet nul zijn, daar anders $\omega(x)$ niet tot nul kon naderen. $\omega''(x) \geq 0$. We weten, dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega''(x)$ bestaat. Ook deze limiet

moet nul zijn, daar anders $\omega'(x)$ niet tot nul kon naderen.

Uit het gegeven, dat $x^2 \omega$ monotoon afneemt, volgt:

$$2x\omega + x^2\omega' \leq 0$$

dus $\frac{\omega}{-x\omega'} \leq \frac{1}{2} \quad (\omega' \leq 0)$.

In de loop van het bewijs maakt D. de opmerking, dat de functie

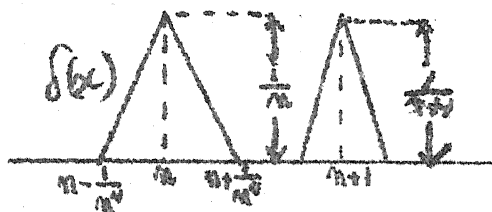
(φ_1)

$$\frac{\omega}{-x\omega'}$$

monotoon (afnemend) is. Van deze monotonie wordt verder gebruik gemaakt.

F₁). Uit een tegenvoorbeeld volgt onmiddellijk, dat de monotonie van (φ_1) niet uit de onderstellingen van stelling 1 is af te leiden:

Laat $\delta(x)$ een "piekjes-functie" zijn, die voor $x=n$ ($n \geq 2$) gelijk is aan $\frac{1}{n^2}$ en die op de intervallen $(n + \frac{1}{n^2}, (n+1) - \frac{1}{(n+1)^2})$



nul is. Definieer

$$\begin{cases} \omega''(x) = +x^{-5} + \delta(x) & (x \geq 2) \\ \omega'(x) = -\int_x^{\infty} \omega''(t) dt & (x \geq 2) \\ \omega(x) = -\int_x^{\infty} \omega'(t) dt & (x \geq 2) \end{cases}$$

Wij hebben: $\omega'(x) = -\frac{1}{4x^4} - \sum_{n \geq x} \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^5})$

$$\omega(x) = \frac{1}{6x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$\omega(x)$ voldoet aan alle voorwaarden van stelling 1. Maar (φ_1) is niet monotoon. Bekijk de afgeleide van het omgekeerde $\frac{-x\omega'}{\omega}$:

$$(\varphi_2) \quad \frac{-\omega\omega' - x\omega\omega'' + x\omega'^2}{\omega^2}$$

Voor $x = n + \frac{1}{2}$ is $\omega'' = 0$, dus (φ_2) positief. Voor $x = n$ is $\omega'' = \frac{1}{n^4}$, dus de teller van (φ_2) :

$$-\frac{1}{6n^3} \cdot \frac{-1}{2n^4} - n \cdot \frac{1}{6n^3} \cdot \frac{1}{n} + n \frac{1}{4n^6} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) < 0$$

als n groot genoeg is.

F_2). We bewijzen thans de bewering van stelling 1 onder de volgende onderstellingen:

Op (a, ∞) is $\omega(x)$ twee keer differentieerbaar, $\omega(x) \geq 0$, $\omega'(x) \leq 0$.

Verder geldt, dat de functie

$$f(x) = \frac{\omega(x)}{-x\omega'(x)} \left(= \frac{1}{x} \frac{dx}{d\gamma} \right)$$

monotoon afnemend is, en steeds $\leq \frac{1}{2}$.

We merken eerst op, dat uit $f(x) \leq \frac{1}{2}$ volgt, dat $x^2\omega(x)$ monotoon afneemt. In het bijzonder zal dus $x\omega(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) dus ook

$$x\omega(x)f(x) = \frac{\{\omega(x)\}^2}{-\omega'(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

of

$$(\varphi_3) \quad e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} \rightarrow 0 \quad (\gamma \rightarrow \infty).$$

Nu bestaat de integraal

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma = \int_{x_0}^{\infty} \omega(x) dx,$$

aangezien $x^2\omega(x)$ monotoon afneemt. Uit A_2) en (φ_3) volgt dan, dat

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma = e^{-\gamma_0} \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} + \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2x}{d\gamma^2} d\gamma.$$

$f(x)$ is monotoon afnemend, dus

$$0 \geq \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{d\gamma} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\gamma} + \frac{1}{x} \frac{d^2x}{d\gamma^2} \frac{d\gamma}{dx},$$

of

$$(9_4) \quad \frac{d^2 x}{d\gamma^2} \leq \frac{1}{x} \frac{dx}{d\gamma} \cdot \frac{dx}{d\gamma} \leq \frac{1}{2} \frac{dx}{d\gamma},$$

daar $h(x) \leq \frac{1}{2}$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} d\gamma &\leq \frac{1}{2} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{dx}{d\gamma} d\gamma \\ &= \frac{1}{2} e^{-\gamma_0} \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0} + \frac{1}{2} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} d\gamma, \end{aligned}$$

dus

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\gamma} \frac{d^2 x}{d\gamma^2} d\gamma \leq e^{-\gamma_0} \left(\frac{dx}{d\gamma} \right)_{\gamma_0}, \text{ h.t.b.t.}$$

G) De uitspraak van stelling 2 ("bij benadering") is ons niet geheel duidelijk.

Indien wij beter op de hoogte waren van de materie, waarop de stellingen van dit "Hoofdstuk II" moeten worden toegepast, zouden wij misschien in staat zijn, enkele meer positieve suggesties aan de hand te doen.

J. Korevaar en F.v.d. Blij.